$\sqrt{2}$が無理数であることのさらなる別証明

$\sqrt{2}$が有理数だと仮定すると，

$\sqrt{2}=\dfrac{q}{p}$ (p，qは自然数) とおける。

両辺2乗して整理すると，　$2p^2=q^2$ …①

q^2が2の倍数なので，qも2の倍数。よって，$q=2q'$とおくと，

$2p^2=4q'^2$　　$\therefore p^2=2q'^2$　したがって，pは2の倍数。

$p=2p'$ とおくと，　$4p'^2=2q'^2$　　$\therefore 2p'^2=q'^2$ …②

②式は①式と同じ形をしているので，同じ操作をくり返すことにより，$q'=2q''$，$q''=2q'''$，$q'''=2q''''$，… が得られる。

q，q'，q''，… は自然数なので，$q>q'>q''>q'''>\cdots$

となるが，自然数には最小の要素1が存在する。これは矛盾。

したがって，$\sqrt{2}$は無理数である。　（証明おわり）

上に紹介したのは，無限降下法，と呼ばれる背理法のバリエーションです。「式の形は同じだが，文字の表す数が小さくなる」という式変形のくり返しに着目し，「でも，無限には小さくなれないよね」と言って矛盾を示す方法です。よって，最小の要素が存在することが明らかな場合，たとえば自然数に関わる証明で，しばしば用いられます。